Elementare Algebra und Analysis für die Schule

Tizian Seehaus

Vorwort

Elementare Algebra ist die grundlegendste Form der Algebra. Sie beschäftigt sich mit Themen, welche essenziell zum Verstehen anderer mathematischen Themengebieten sind, und vermittelt die Grundbausteine des mathematischen Denkens, der Logik und der Zahlentheorie. Elementare Analysis bietet den Grundbaustein zum Verständnis von Funktionen und der Differenzial und Integralrechnung. Dieses Buch soll als Nachschlagewerk und Übungsheft für Schüler dienen. Ziel ist es, einen umfassenden Einblick in die wichtigsten Themen der elementaren Algebra und Analysis, welche in der Schule benötigt werden, zu geben. Am Ende jedes Kapitels finden sich Aufgaben, welche sich gut zum Wiederholen des Gelernten eignen. Ich fordere Sie ermutigend dazu auf, sich mit diesen Aufgaben selbstständig zu beschäftigen. Dieses Buch hat das Potenzial, Ihnen alles, was Sie über die elementare Algebra und Analysis wissen müssen, beizubringen. Allerdings müssen Sie letztendlich trotzdem selbst die Zeit und Energie investieren, sich damit auseinander zu setzen. Denn Übung macht den Meister.

Inhaltsverzeichnis

KAPITEL 1

Notation und Begriffe

Im Laufe dieses Buches finden Sie immer wieder verschiedene Notationsformen. Im Folgenden werde ich Ihnen diese beispielhaft zeigen, damit Sie sie in den noch folgenden Kapiteln verstehen.

Definition

Eine Definition ist im Allgemeinen einfach eine Art Erklärung. Dabei wird ein neues Konzept, ein neuer Fachbegrief, oder alles andere, was eine formale Erklärung verdient hat, definiert. Der Sinn einer Definition ist es, ein einheitliches mentales Model von der definierten Sache zu haben. Definition werden in diesem Buch durch einen blauen Kasten gekennzeichnet. Hier ist eine beispiel Definition.

Definition 1.1: Buch

Ein Buch ist eine Ansammlung von ein oder mehreren Seiten, welche zusammengehalten werden.

Satz

Ein Satz ist eine mathematische Formulierung von einem Sachverhalt, einer Regel oder ähnliches. Häufig werden auch Formeln mithilfe eines Satzes eingeführt. Einen Satz muss man in der Regel beweisen, um zu zeigen, dass dieser Wahr ist. [1] Danach kann man einen Satz in jeglicher Form von Argumentation, Beweisen und Antworten verwenden. Sätze werden in diesem Buch durch einen grünen Kasten gekennzeichnet. Hier ist ein beispiel Satz.

[1] In diesem Buch werden wir allerdings nicht jeden Satz beweisen, wenn der Beweis nicht von großer Bedeutung für die Schule ist.

Satz 1.1

Ein beschriebenes Buch hat immer einen Autor.

Korollar

Ein Korollar ist eine Aussage, die sich aus einem Satz oder einer Definition offensichtlich ergibt. Es sind meistens logische Schlussfolgerungen. Korollare werden in diesem Buch durch dick gedruckten Text und dem Präfix *Korollar* gekennzeichnet. Jedes Korollar verweist durch die ersten zwei Ziffern der Nummerierung auf den Satz, der für das Korollar relevant ist. Hier ist ein beispiel Korollar.

Korollar 1.1.1. *Ein Buch ohne Autor ist unbeschrieben.*

Bemerkung

Bemerkungen sind Allgemeine Hinweise, auf die ich aufmerksam machen will. Sie werden in diesem Buch durch einen roten Kasten gekennzeichnet. Hier ist eine beispiel Bemerkung.

Manche beschriebene Bücher haben auch mehrere Autoren.

Beispiel

Beispiele werden in diesem Buch häufig benutzt, um neu eingeführte Themen beispielhaft verständlich zu machen. Hier ist ein beispiel Beispiel.

Bsp. 1.1

Frage: Hat dieses Buch einen Autor?

Antwort: Da dieses Buch beschrieben ist, hat es nach Satz 1.1 einen Autor.

Aufgaben

Am Ende jedes Kapitels finden sich Aufgaben. Hier ist eine beispiel Aufgabe.

1.1. Gibt es ein unbeschriebenes Buch, welches einen Autor hat? Begründen Sie ihre Antwort.

Teil I

Elementare Algebra

KAPITEL 2

Aussagenlogik

Die Mathematik umfasst eine große Landschaft an unterschiedlichen Themengebieten und Bereiche. Trotz dem kann man alle in der Schule behandelten Bereiche auf ein zugrunde liegendes Konzept reduzieren, welches wir uns in diesem Kapitel anschauen wollen: Aussagen. Wenn ihr dieses Konzept verstanden habt, werdet ihr es überall wieder finden und euer Denken über andere Themengebiete tiefgreifend vereinfachen.

2.1 Wahrheitswert

Definition 2.1: Wahrheitswert

Ein Wahrheitswert ist ein Wert, der den Grad an Wahrheit ausdrückt. In der Schule gibt es zwei Wahrheitswerte: Wahr und Unwahr.

Unwahr ist das gleiche wie *Falsch*.

2.2 Aussagen

Definition 2.2: Aussage

Eine Aussage ist eine Formulierung, welche entweder wahr oder unwahr sein kann.

Satz 2.1: Finalität des Wahrheitswerts

Der Wahrheitswert einer Aussage ist final kann sich nicht mehr ändern.

Beispiele für eine Aussage sind:

1. Dieses Buch ist beschrieben (wahr)
2. Dieses Buch ist unbeschrieben (unwahr)

3. Die Zahl 4 ist eine gerade Zahl (wahr)
4. Das Ergebnis von $2 + 2$ ist 4 (wahr)
5. Die Zahl 4 ist eine Primzahl (unwahr)

Dies sind alles Aussagen, formuliert durch die deutsche Sprache. In der Mathematik sind Aussagen allerdings häufiger durch die mathematsiche Sprache formuliert. Beispiele dafür sind:

1. $2 + 2 = 4$ (wahr)
2. $2 + 2 = 5$ (unwahr)
3. $10 * 2 > 0$ (wahr)
4. $f(2) = 3, \quad f(x) = x + 1$ (wahr)

x ist hier eine *Variable* (Siehe chapter 4).

Wenn Sie ein paar Beispiele von hier noch nicht ganz verstehen, ist das völlig in Ordnung. In den nachfolgenden Kapiteln werden wir die hier benutzen Konzepte wie Gleichungen, Ungleichungen, Variablen und Funktionen genauer erklären und einführen. Wichtig ist nur, dass Sie das Konzept von Aussagen verstehen und erkennen können.

2.3 Aussageform

Definition 2.3: Aussageform

Eine Aussageform A ist eine Formulierung, dessen Wahrheitswert von ein oder mehreren Variablen abhängt. Um den Wahrheitswert einer Aussageform zu bestimmen, muss man die Aussageform mit einer konkreten Eingabe evaluieren.

Man sagt statt Aussageform auch häufig *Prädikat*.

Satz 2.2

Wenn man eine Aussageform mit einer konkreten Eingabe evaluiert, wird diese zu einer Aussage.

Korollar 2.2.1. *Wenn man eine Aussageform mit einer konkreten Eingabe evaluiert, hat die Aussageform für diese Eingabe einen Wahrheitswert.*

Korollar 2.2.2. *Jede Aussageform hat für jede konkrete Eingabe einen eigenen Wahrheitswert.*

Der Unterschied zwischen einer *Aussage* und einer *Aussageform* ist also, dass man einer *Aussageform* nicht direkt ansieht, ob sie wahr oder unwahr ist. Man muss sie zuerst mit einer konkreten Eingabe evaluieren.
Beispiele für eine Aussageform sind:

1. Das nächste Auto das ich sehe ist grün.
2. Die Zahl, welche du mir gibst, ist gerade.
3. Die Zahl, welche du mir gibst, ist keine 4.

Beispiele für die wieder häufigere mathematische Ausdrucksweise sind:

1. $x \neq 4$

$\neq$ bedeutet ungleich.

2. $x - 2 = 0$

Für eine Aussageform, welche von der Variable x abhängt, schreibt man häufig auch $A(x)$. Für das Evaluieren der Aussageform für die konkrete Eingabe $x = 1$ z.B. schreibt man dann $A(1)$.

Im folgenden Beispiel wollen wir die Zusammenhänge zwischen *Aussagen* und *Aussageformen* weiter erläutern.

Bsp. 2.1

Frage: Geben Sie alle Wahrheitswerte der Aussageform $A(x) : x - 2 = 0$ an mit den konkreten Eingaben $1, 2, 3, 4$ für x.

Antwort:

x	1	2	3	4	
$A(x)$	$1 - 2 = 0$	$2 - 2 = 0$	$3 - 2 = 0$	$4 - 2 = 0$	} Aussagen
Wahrheitswert	unwahr	wahr	unwahr	unwahr	

Übungsaufgaben

2.1. Geben Sie für jede nachfolgend aufgeführte Formulierung an, ob es sich um eine Aussage handelt, und falls ja, was der Wahrheitswert dieser Aussage ist.

a) Es existieren Computer.
b) $2^2 = 2 + 2$
c) Die Quadratwurzel von 9 ist 2.
d) $x + 2 = 2$
e) Die Zahl 0 ist größer als alle Zahlen von 1 bis 10.
f) Die Zahl, welche du mir gibst, ist eine Primzahl.
g) Alle Menschen sind Säugetiere.
h) Alle Zahlen zwischen 1 und 5 sind ungerade.
i) Es existiert ein x, sodass alle Zahlen zwischen x und $x + 10$ gerade sind.

2.2. Geben Sie für jede dieser Aussageformen alle Wahrheitswerte mit den konkreten Eingaben $-1, 0, 1$ für x an.

a) $A_1(x) : x + x = 2$
b) $A_2(x) : 0 = x$
c) $A_3(x)$: "$x + 11$ ist gerade"
d) $A_4(x) : x + 1 = 5$
e) $A_5(x) : x \geq 0$
f) $A_6(x) : x + 2 \neq 2$

$\geq$ bedeutet größer oder gleich.

Lernvideos

- Aussagenlogik von Mathe by Daniel Jung.
- Aussagenlogik von SimpleClub. (Formale Begriffe/Definitionen und Schreibweisen nicht relevant, nur gesagtes verstehen.)

KAPITEL 3

Mengenlehre

Wir wollen uns nun einem weiteren wichtigen fundamentalen Konzept widmen: Den Mengen.

3.1 Mengen

Definition 3.1: Mengen und Mengenaufzählung

Eine Menge ist eine Ansammlung von unterscheidbaren Elementen. Für eine Menge M mit den Elementen $e_1, e_2, \cdots, e_m$ schreibt man $M = \{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$ und nennt dies die *Mengenaufzählung*.

Dabei muss es keinen Zusammenhang zwischen den Elementen einer Menge geben. Beispiele für Mengen sind:

1. $M_1 = \{\text{Sommer,Herbst,Winter,Frühling}\}$
2. $M_2 = \{1, 5, 8, 100, 432, 501\}$
3. $M_3 = \{\} = \emptyset$

Die Menge M_3 nennt man auch *leere Menge* und kürzt man mit $\emptyset$ ab.

Definition 3.2: Leere Menge

Die Menge, die keine Elemente entählt, heißt leere Menge. Sie wird mit $\emptyset$ oder auch $\{\}$ bezeichnet.

Nun stellt sich häufig die Frage, ob ein bestimmtes Element in einer Menge enthalten ist. Da diese Frage so häufig ist, gibt es dafür eine eigene Schreibweise.

Definition 3.3: Elementprädikat

Das Elementprädikat $\in$ ist eine Relation[a], welches angibt, ob eine Element e ein Teil von der Menge M ist. Die Aussageform $e \in M$ ist genau dann Wahr, wenn e ein Element von M ist. Für die Negation schreibt man $\notin$. Die Aussageform $e \notin M$ ist genau dann Wahr, wenn e *kein* Element von M ist.

[a] Was eine Relation ist, ist für uns in hier erstmal unwichtig. Der Vollständigkeit halber wird es in der Definition aber trotzdem benutzt.

Für $\in$ liest man "ist Element von"

Bsp. 3.1: Elementprädikat

Frage: Geben Sie den Wahrheitswert folgender Aussagen an.

a) $1 \in \{0, 1, 2, 3\}$
b) $0 \in \{-1, 1\}$
c) $10 \notin \{0, 5\}$
d) $10 \notin \{0, 5, 10\}$
e) $0 \in \emptyset$

Antwort:

a) Wahr
b) Unwahr
c) Wahr
d) Unwahr
e) Unwahr

Stellen Sie sich nun folgendes vor: Sie öffnen eine Schokoriegel Packung. Dann sehen Sie mit Sicherheit verschiedene Sorten an Schokoriegeln: Mars, Snickers, Twix, KitKat, usw. Sie können nun die Menge an allen Schokoriegeln in der Packung als eine Menge S betrachten. Genauso gut können Sie aber auch die Menge an Mars in der Packung als eine eigene Menge S_{Mars} betrachten. Nun stellt sich die Frage, wie wir S_{Mars} formell definieren und aufschreiben können. Eine wichtige Erkenntnis ist, dass alle Mars Riegel die Aussageform "e ist Mars" erfüllen. Also können wir einfach für jedes Element(Schokoriegel) e, dass in S enthalten ist fragen, ob die Aussage "e ist Mars" wahr ist. Alle Riegel, für die dies der Fall ist, sind dann auch in S_{Mars} enthalten. Informell könnte man dies so aufschreiben:

Eine Aussage gilt als erfüllt, wenn sie wahr ist.

$$S_{Mars} = \text{“ Alle Elemente } e \text{ aus S , für die gilt ,dass } e \text{ ist Mars wahr ist ”}$$

Die entsprechende mathematische Schreibweise dazu lautet:

$$S_{Mars} = \{ e \in S : \underbrace{e \text{ ist Mars}}_{\text{Aussageform}} \}$$

Definition 3.4: Mengennotation mit Aussageform

Sei S eine Menge und $A(x)$ eine Aussageform. Eine Menge M, in der nur Elemente e aus S sind, welche die Aussageform $A(e)$ erfüllen, schreibt man als $M = \{e \in S : A(e)\}$. Lässt man S in der Notation weg, so werden alle möglichen Werte für e betrachtet und entsprechend auf $A(e)$ überprüft.

Anstatt : wird häufig auch | verwendet.

Somit kann man diese Mengennotation als eine Art *Filter/Einschränkung* betrachten, welcher aus einer Startmenge nur diejenigen Elemente auswählt, welche eine bestimmte Aussageform erüllen. Beispiele für diese Notation sind:

1. $M_1 = \{x \in \mathbb{Z} : \underbrace{x \text{ ist gerade}}_{\text{Aussageform}}\} = \{\cdots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \cdots\}$
2. $M_2 = \{x \in \mathbb{N}_0 : x \text{ ist zwischen 0 und 5}\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
3. $M_3 = \{x \in \mathbb{N} : x = 5\} = \{5\}$

Die Menge $\mathbb{Z}$ heißt Ganze Zahlen und wird in section 3.3 besprochen.

Die Worte *für die gilt* (als : in der Notation gekennzeichnet) kann man auch öfter in einer Mengennotation wiederholen. Häufig ist dies der Fall, wenn wir zusätzliche *Quantoren* wie "Es existiert" oder "Für alle" in der Aussageform benutzen. Sei zum Beispiel

$$G(p_1, p_2) : \text{“}p_1 \text{ ist Geschwister von } p_2\text{”}$$

eine Aussageform mit zwei Eingaben, und die Menge

M = “ Alle Menschen m , für die gilt , dass zwei weitere Menschen a,b existieren , für die gilt , dass a Geschwister von x ist und b Geschwister von x ist ”

Dann lässt sich M also auch wie folgt aufschreiben:

$$M = \{m \in \text{Menschen} : \underbrace{\text{Es existieren } a, b \in \text{Menschen} : \underbrace{G(a, x) \text{ und } G(b, x)}_{\text{Innere Aussageform}}}_{\text{Äußere Aussageform}}\}$$

Anhand den Beispielen lässt sich auch feststellen, dass eine Menge nicht unbedingt endlich viele Elemente haben muss. M_1 zum Beispiel hat unendlich viele Elemente: Da es unendlich viele Zahlen gibt, gibt es auch unendlich viele Zahlen, die gerade sind.

Definition 3.5: Mächtigkeit von Mengen

Die Mächtigkeit einer Menge M, kurz $|M|$, ist ein Maß für die Anazhl an Elemente in M.

Das Zeichen $|x|$ ist auch in anderen Bereichen als Mächtigkeit von x definiert, und ist ein Maß für die *Größe* von M. Beispielsweise wenn x ein Vektor ist, ist $|x|$ die Länge des Vektors.

Satz 3.1: Endlichkeit von Mengen

Eine Menge kann endlich oder unendlich viele Elemente beinhalten.

Bsp. 3.2: Mächtigkeit von Mengen

Frage: Geben Sie die Mächtigkeit folgender Mengen an.

a) $M_1 = \{x \in 1, 2, 3, 5, 7 : x \text{ ist gerade}\}$
b) $M_2 = \{x : x^2 = 1\}$
c) $M_3 = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ ist durch 3 teilbar}\}$

Antwort:

a) $|M_1| = 1$. Da $M_1 = \{2\}$
b) $|M_2| = 2$. Da $M_2 = \{-1, 1\}$
c) $|M_3| = \infty$. Da $M_3 = \{3, 6, 9, 12, \cdots\}$

Wenn wir uns nun noch einmal die zwei Mengen S und S_{Mars} aus dem Beispiel von Vorhin anschauen, bemerken wir, dass jedes Element von S_{Mars} auch in S enthalten ist. Formell lässt sich das so aufschreiben.

$$\text{Für alle } e \in S_{Mars} \text{ gilt auch } e \in S. \tag{3.1}$$

Die Worte *Für alle* lassen sich mathematisch auch durch das Symbol $\forall$ ausdrücken. Ganz korrekt wäre Ausdruck (3.1) also:

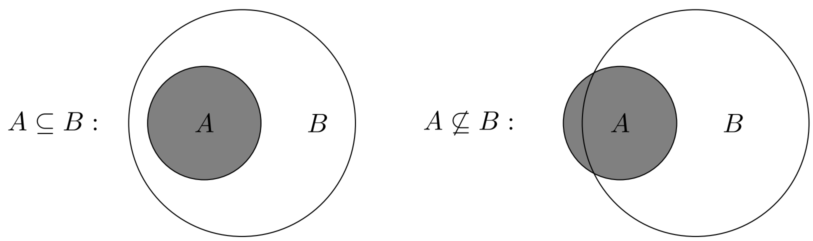
$$\forall e \in S_{Mars} : e \in S.$$

Da häufig zwei Mengen mit diesen Eigenschaften auftreten, gibt es dafür einen extra Begriff und Notation.

Definition 3.6: Teilmenge

Eine Teilmenge T von einer Menge M, kurz $T \subseteq M$, ist eine Menge, für die folgendes gilt: $\forall x \in T : x \in M$. Falls $|T| = |M|$, so gilt sogar $T = M$.

$T = M$ bedeutet T und M haben die gleichen Elemente.



$\not\subseteq$ bedeutet "keine Teilmenge".

Folgendes Beispiel soll das Konzept der Teilmenge noch einmal verdeutlichen.

Bsp. 3.3: Teilmengen

Frage: Geben sie jeweils an, ob die folgenden Aussagen Wahr oder Unwahr sind.

a) $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
b) $\{2, 100\} \subseteq \{e \in \mathbb{N} : e \text{ ist gerade}\}$
c) $\{3, 6, 9\} \subseteq \{x \in \mathbb{N} : x \in \{3, 6\}\}$
d) $\{x \in \mathbb{Z} : x^2 = 1\} \subseteq \{1\}$
e) $\{x \in \mathbb{N}_0 : 2 * x = x\} \subseteq \{x \in \mathbb{N}_0 : x \geq 0\}$

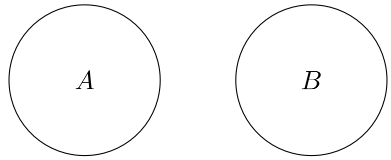
Antwort:

a) Wahr.
b) Wahr.
c) Unwahr. Da $\{3, 6, 9\} \not\subseteq \{3, 6\} = \{x \in \mathbb{N} : x \in \{3, 6\}\}$
d) Unwahr. Da $\{x \in \mathbb{Z} : x^2 = 1\} = \{-1, 1\} \not\subseteq \{1\}$
e) Wahr. Da $\{x \in \mathbb{N}_0 : 2 * x = x\} = \{0\} \subseteq \{x \in \mathbb{N}_0 : x \geq 0\}$

3.2 Mengenoperatoren

Wie mit Zahlen kann man mit Mengen auch rechnen. Man kann zum Beispiel Mengen auch miteinander addieren und subtrahieren. Im Folgenden schauen wir uns die Rechenoperatoren, welche man auf Mengen anwenden kann, an. Dazu betrachten wir die zwei Mengen A und B, welche wir wie folgt darstellen:

Rechenoperatoren sind im Allgemeinen Operatoren, welche zwei oder mehrere Operanden manipulieren. Beispiele sind $+, -, /, *, \cup, \cap, \setminus$



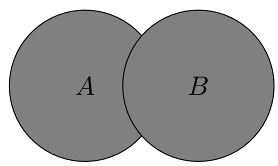
3.2.1 Vereinigung

Definition 3.7: Vereinigung

Die Vereinigung zwischen zwei Mengen A und B, kurz $A \cup B$, ist eine Menge $M = \{e : e \in A \textbf{ oder } e \in B\}$.

Man kann sich das Symbol $\cup$ wie einen Pot vorstellen, in welchen beide Mengen A und B “reingeleert” werden.

Die Vereinigung nimmt also einfach die zwei Mengen A und B, und packt sie in eine gemeinsame Menge, wobei Duplikate nur einmal vorkommen. Anschaulich sieht die Vereinigung so aus:

$A \cup B =$ 

Bsp. 3.4: Vereinigung von Mengen

Frage: Geben Sie jeweils die Vereinigungsmenge $A \cup B$ an.

a) $A = \{-4, -2, 1, 2, 3\}$, $B = \{-3, -1, 1, 3, 5\}$
b) $A = \{-2, -1, 0, 1, 10\}$, $B = \{-3, -2, 1, 3, 5\}$
c) $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{3, 4, 5\}$
d) $A = \{0, 1\}$, $B = \{0, 1\}$

Antwort:

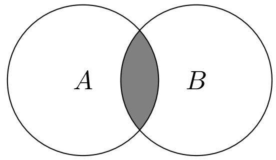
a) $A \cup B = \{-4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 5\}$
b) $A \cup B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 3, 5, 10\}$
c) $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
d) $A \cup B = \{0, 1\}$

3.2.2 Durchschnitt

Definition 3.8: Durchschnitt

Der Durchschnitt zwischen zwei Mengen A und B, kurz $A \cap B$, ist eine Menge $M = \{e : e \in A \textbf{ und } e \in B\}$.

Der Durchschnitt nimmt also die zwei Mengen A und B, und packt nur diejenigen Elemente, welche gleichzeitig in A und B sind, in M. Anschaulich sieht der Durchschnitt so aus:

$A \cap B =$ 

Bsp. 3.5: Durchschnitt von Mengen

Frage: Geben Sie jeweils die Durchschnittsmenge $A \cap B$ an.

a) $A = \{-4, -2, 1, 2, 3\}$, $B = \{-3, -1, 1, 3, 5\}$
b) $A = \{-2, -1, 0, 1, 10\}$, $B = \{-3, -2, 1, 3, 5\}$
c) $A = \{0, 1\}$, $B = \{0, 1\}$
d) $A = \{x \in \mathbb{N} : x > 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} : x < 10\}$
e) $A = \{x : x \text{ ist weiblich}\}$, $B = \{x : x \text{ ist männlich}\}$

Antwort:

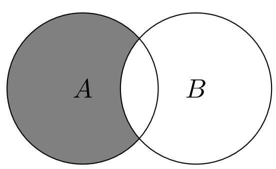
a) $A \cap B = \{1, 3\}$
b) $A \cap B = \{1\}$
c) $A \cap B = \{0, 1\}$
d) $A \cap B = \{x \in \mathbb{N} : x > 0 \text{ und } x < 10\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
e) $A \cap B = \emptyset$

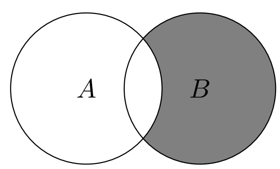
3.2.3 Differenz

Definition 3.9: Differenz

Die Differenz zwischen zwei Mengen A und B, kurz $A \setminus B$, ist eine Menge $M = \{e : e \in A \textbf{ und } e \notin B\}$.

Die Differenz nimmt also die zwei Mengen A und B, und packt nur diejenigen Elemente, welche in A, aber nicht in B sind, in M. Anschaulich sieht die Differenz so aus:

$A \setminus B =$ 

$B \setminus A =$ 

$A \setminus B$ spricht man als "A *außer* B". Sinnbildlich kann man sich dies tatsächlich wie eine Differenz vorstellen: Von der Menge A wird die Menge B "abgezogen" oder "gestrichen".

Bsp. 3.6: Differenz von Mengen

Frage: Geben Sie jeweils die Differenzmenge $A \setminus B$ an.

a) $A = \{-4, -2, 1, 2, 3\}$, $B = \{-3, -1, 1, 3, 5\}$
b) $A = \{-2, -1, 0, 1, 10\}$, $B = \{-3, -2, 1, 3, 5\}$
c) $A = \{0, 1\}$, $B = \{0, 1\}$

d) $A = \{x \in \mathbb{N} : x > 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} : x < 10\}$
e) $A = \{x : x \text{ ist weiblich}\}$, $B = \{x : x \text{ ist männlich}\}$
f) $A = \{x \in \mathbb{Z} : x \geq 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} : x > 0\}$

Antwort:
a) $A \setminus B = \{-4, -2, 2\}$
b) $A \setminus B = \{-1, 0, 10\}$
c) $A \setminus B = \emptyset$
d) $A \setminus B = \{x \in \mathbb{N} : x \geq 10\}$
e) $A \setminus B = A$
f) $A \setminus B = \{0\}$

3.3 Zahlenmengen

Da wir nun ein grundlegendes Verständnis für Mengen haben, ist es an der Zeit, die Mengen kennenzulernen, in welchen die Zahlen eingeteilt werden.

Wenn wir uns alle Zahlen einmal anschauen, kann man gewisse Eigenschaften feststellen. Ein paar Eigenschaften sind zum Beispiel:

- Zahlen, die nur positiv sind.
- Zahlen, die keine Nachkommastellen haben. (Also ganz sind)
- Zahlen, die man als Bruch zweier ganzer Zahlen darstellen kann.
- Zahlen, die unendlich viele Nachkommastellen haben.
- usw.

ganze Zahlen sind Zahlen ohne Nachkommastellen.

Wir werden uns nun die wichtigsten Zahlenmengen, welche man in der Schule benötigt, und deren Definitionen anschauen.

Definition 3.10: Zahlenmengen

Es existieren folgende definierte Zahlenmengen:

- $\mathbb{N} := \{x : x \text{ ist positiv und ganz}\}$ heißen *Natürliche Zahlen.*
- $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$
- $\mathbb{Z} := \{x : x \text{ ist ganz}\}$ heißen *Ganze Zahlen.*
- $\mathbb{Q} := \{x : \text{Es existieren } a, b \in \mathbb{Z} : x = \frac{a}{b}\}$ heißen *Rationale Zahlen*
- $\mathbb{R} := \{x : x \text{ ist reel}\}$ heißen *Reele Zahlen*
- $\{x \in \mathbb{R} : x \notin \mathbb{Q}\} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ heißen *Irrationale Zahlen*

Reele Zahlen sind alle Zahlen auf dem Zahlenstrahl.

$\cup$ ist die *Vereinigung* (Siehe Definition 3.7).

$:=$ bedeutet "ist definiert als".

Für die *Irrationalen Zahlen* gibt es kein etabliertes Symbol.

Die Worte *Es existieren* lassen sich mathematisch auch durch das Symbol $\exists$ ausdrücken. Ganz korrekt wäre die Definition von $\mathbb{Q}$ also:

$$\mathbb{Q} := \{x : \exists a, b \in \mathbb{Z} : x = \frac{a}{b}\}$$

Umgangssprachlich also:

$\mathbb{Q}$ ist definiert als die Menge aller Zahlen, die man als Bruch zweier Zahlen a, b aus den ganzen Zahlen schreiben kann.

Der Unterschied zwischen *rationalen* und *irrationalen* Zahlen ist also, dass *rationale* Zahlen endlich viele oder periodische Nachkommastellen haben. *Irrationale Zahlen* hingegen haben unendlich viele Nachkommastellen mit keinem erkennbaren Muster oder wiederholenden Vorkommen.

Definition 3.11: Periodische Zahlen

Eine *periodische* Zahl ist eine Zahl, welche eine Folge an Zahlen als Nachkommastelle hat, die sich unendlich oft wiederholt.

$\frac{1}{3} = 1.3333\ldots$ ist also eine periodische Zahl, da sich die 3 in den Nachkommastellen immer wiederholt. Man kann dies auch als $\frac{1}{3} = 1.\overline{3}$ schreiben.

Der Strich wird über den Teil der Nachkommastellen geschrieben, welche sich unendlich oft wiederholen.

Bsp. 3.7: Periodische Zahlen erkennen

Frage: Geben Sie jeweils an, ob es sich um eine periodische Zahl handelt oder nicht. Falls ja, schreiben Sie die Zahl in der periodischen Schreibweise.

a) 1.2345
b) $1.2525252525\ldots$
c) $\frac{1}{2}$
d) $5.8144144144\ldots$
e) $\frac{9}{11}$
f) π

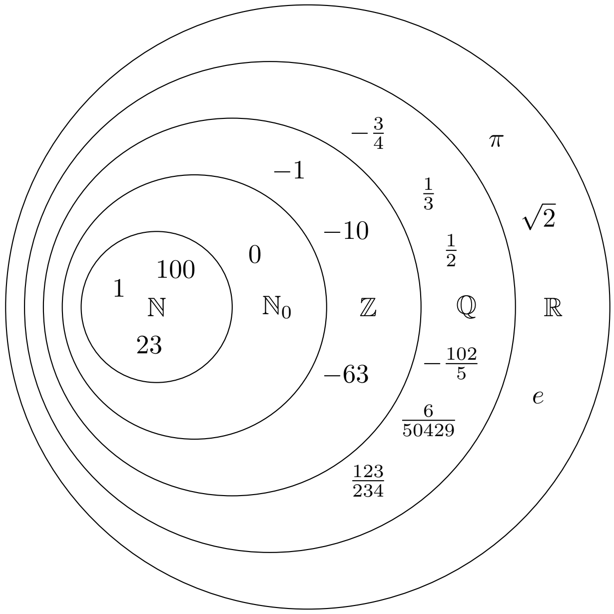
Antwort:

a) Keine periodische Zahl, da 1.2345 endlich viele Nachkommastellen hat.
b) Periodische Zahl. $1.\overline{25}$.
c) Keine periodische Zahl, da $\frac{1}{2} = 0.5$ und 0.5 hat endlich viele Nachkommastellen.
d) Periodische Zahl. $1.8\overline{144}$.
e) Periodische Zahl, da $\frac{9}{11} = 0.\overline{81}$.
f) Keine periodische Zahl, da $\pi = 3.1415926\ldots$ keinen unendlich oft wiederkehrenden Teil in den Nachkommastellen hat. π ist *irrational*.

Es gelten also folgende Relationen zwischen den Zahlenmengen:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \tag{3.2}$$

$\subseteq$ bedeutet *Teilmenge*. (Siehe Definition 3.6).



Obwohl alle Zahlenmengen eine unendliche Mächtigkeit haben (denn es gibt ja auch unendlich viele Zahlen), kann man diese untereinander vergleichen. Wie am obigen Diagramm auch gut zu sehen ist, umfasst $\mathbb{Z}$ z.B. mehr Zahlen als $\mathbb{N}$ (Dies ist auch durch Ausdruck (3.2) gezeigt). Daher kann man sagen, dass zusätzlich zu Ausdruck (3.2) auch

$$|\mathbb{N}| < |\mathbb{N}_0| < |\mathbb{Z}| < |\mathbb{Q}| < |\mathbb{R}|$$

gilt.

Bsp. 3.8: Zahlenmengen erkennen

Frage: Geben Sie jeweils an, zu welcher *kleinsten* Zahlenmenge die Zahl gehört.

a) 0
b) 12345
c) $\frac{100}{1}$
d) $\frac{1}{6}$
e) -5
f) -5.54321
g) $\frac{\pi}{1}$
h) $-\pi$
i) $-\frac{4}{5}$
j) $0.23\overline{45}$

Antwort:

a) $0 \in \mathbb{N}_0$.
b) $12345 \in \mathbb{N}$
c) $\frac{100}{1} = 100 \in \mathbb{N}$
d) $\frac{1}{6} \in \mathbb{Q}$
e) $-5 \in \mathbb{Z}$, da -5 ganz ist.
f) $-5.54321 \in \mathbb{Q}$, da -5.54321 endlich viele Nachkommastellen hat.
g) $\frac{\pi}{1} = \pi \in \mathbb{R}$
h) $-\pi \in \mathbb{R}$
i) $-\frac{4}{5} \in \mathbb{Q}$
j) $0.23\overline{45} \in \mathbb{Q}$, da $0.23\overline{45}$ periodisch ist.

Wie man sieht, umfasst die Zahlenmenge $\mathbb{R}$ auch "alle" anderen Zahlen. Wenn in dem Bsp. 3.8 nicht explizit nach der *kleinsten* Zahlenmenge gefragt worden ist, dann wäre auch $\mathbb{R}$ überall eine richtige Antwort. Tatsächlich wird $\mathbb{R}$ häufig verwendet, wenn man einfach "alle" Zahlen betrachten und keine weiteren Einschränkungen einführen will.

3.4 Intervalle

Häufig ist es hilfreich, nur einen bestimmten *Zahlenbereich* von den Reelen Zahlen auszuwählen. Da es selbst zwischen 0 und 1 unendlich viele Reele Zahlen gibt (denn es gibt ja auch unendlich viele Nachkommastellen), kann man diesen Zahlenbereich nicht mithilfe der normalen Mengenaufzählung aufschreiben. Mit der Mengennotation mit Aussageform (siehe Definition 3.4) geht dies allerdings: Die Menge

$$M = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$$

enthält alle Reelen Zahlen zwischen 0 und 1 jeweils inklusive. Da diese Schreibweise aber sehr lange ist, hat man sich eine eigene Intervallnotation ausgedacht:

$$M = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\} = [0; 1]$$

Diese Notation und das Konzept von Intervallen wollen wir uns nun näher anschauen.

Definition 3.12: Intervalle

Ein Intervall ist eine Menge von kontinuierlichen Reelen Zahlen. Es hat zwei Intervallgrenzen, den Anfang $a \in \mathbb{R}$ und das Ende $b \in \mathbb{R}$. Man unterscheidet zwischen *geschlossenen* und *offenen* Intervallgrenzen:

- Geschlossene Intervallgrenzen beinhalten den Wert der Grenze. Man schreibt dafür $[a$ bzw. $b]$.
- Offene Intervallgrenzen beinhalten den Wert der Grenze **nicht**. Man schreibt dafür $(a$ bzw. $b)$.

Die Intervallgrenzen werden dann mit einem Semikolon verknüpft und bilden ein ganzes Intervall:

- $[a; b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
- $[a; b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$
- $(a; b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$
- $(a; b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

Manchmal wird für $(a$ bzw. $b)$ auch $]a$ bzw. $b[$ geschrieben.

Wenn man $\pm\infty$ als Intervallgrenze benutzt, ist diese eine *offene* Intervallgrenze. Korrekte Beispiele sind:

- $(-\infty; 10]$
- $(10; \infty)$

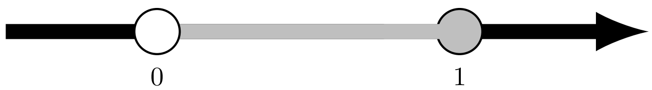
Das Intervall $[0; 1)$ ist also eine Menge, welche alle Zahlen enthält, die zwischen der 0 und 1 liegen, inklusive der 0 und exklusive der 1:

$[0;1)$

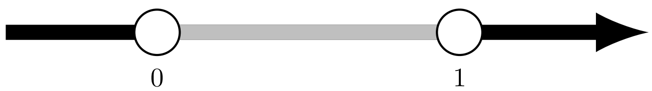
Weitere Beispiele sind:

$[0;1]$

$(0;1]$



$(0;1)$



Bsp. 3.9: Intervalle

Frage: Geben Sie jeweils den Wahrheitswert der folgenden Aussagen an.

a) $1 \in [0;2]$	b) $1 \in [0;1]$	c) $0 \in (0;1]$
d) $1 \in (0;1]$	e) $3 \in [0;4)$	f) $3.999999 \in [0;4)$
g) $100 \in [-10;100)$	h) $1 \in (\frac{1}{3};5)$	i) $4.999999 \in (\frac{1}{3};5)$
j) $10 \in [0;20] \setminus \{10\}$	k) $4.123 \in [0;10] \setminus [4;5]$	l) $-4 \in (-\infty;5] \setminus (-4;0]$
m) $\frac{1}{3} \in (-\infty;10] \setminus \mathbb{N}$	n) $10 \in [0;10) \cup (10;20]$	o) $10 \in [0;10] \cup (10;20]$

Antwort:

a) Wahr.	b) Wahr.	c) Unwahr.
d) Wahr.	e) Wahr.	f) Wahr.
g) Unwahr.	h) Wahr.	i) Wahr.
j) Unwahr.	k) Unwahr.	l) Wahr.
m) Wahr.	n) Unwahr.	o) Wahr.

Übungsaufgaben

3.1. Geben Sie folgende umgangssprachlich ausgedrückten Mengen in Mengennotation mit Aussageform (Definition 3.4) an.

a) “Alle Elemente aus den ganzen Zahlen, für die gilt, dass sie gerade sind.”
b) “Alle Elemente aus den ganzen Zahlen, für die gilt, dass sie zwischen 0 und 10 liegen.”
c) “Alle ungerade Zahlen.”
d) “Alle ganze Zahlen, die größer als 5 sind.”
e) “Alle Monate, in welchen Winter ist.”

f) “Alle Zahlen x, für die $x^2 = 4$ gilt.”
g) “Alle Zahlen aus der Menge $\{1, 3, 4, 5\}$, die gerade sind.”
h) “Alle Zahlen x, sodass eine ganze Zahl a existiert, die größer 1 ist, und für die gilt $x = a^2$.”
i) “Alle Zahlen, welche man als Produkt von zwei ganzen Zahlen, welche größer 0 sind, schreiben kann.”

3.2. Sei P die endliche Menge an allen Menschen auf der Erde. Sei $M = \{p \in P : p \text{ ist männlich}\}$ und $F = \{p \in P : p \text{ ist weiblich}\}$ mit $P \neq M \neq F \neq \emptyset$. Geben Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussagen an.

a) $M \subseteq P$
b) $F \subseteq P$
c) $M \subseteq F$
d) $\{p \in M : p \text{ ist volljährig}\} \subseteq P$
e) $\{p \in P : p \text{ ist minderjährig}\} \subseteq F$
f) $\{p \in P : p \text{ ist weiblich und volljährig}\} \subseteq F$
g) $M \cup F \subseteq F$
h) $M \cap F \subseteq M$

3.3. Geben Sie jeweils an, zu welcher *kleinsten* Zahlenmenge die Zahl gehört.

a) -10
b) $\frac{9}{12}$
c) $\frac{4}{2}$
d) 0
e) 0.01
f) $0.\overline{01}$
g) $\frac{\pi}{1}$
h) 21212121.0
i) 101.12345

3.4. Geben Sie die für jede Menge in Mengennotation zugehörige Intervallschreibweise an.

a) $\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 4\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} : -0.5 \leq x < 4\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} : 5 < x < 100\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} : x \leq 100\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} : x < 12.123\}$
f) $\{x \in \mathbb{R} : -4 < x\}$
g) $\{x \in \mathbb{R} : x > 3\}$
h) $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 3\}$
i) $\{x \in \mathbb{R} : 5 < x \leq \frac{20}{2}\}$
j) $\{x \in \mathbb{R} : -123 < x \leq 30\}$

3.5. Geben Sie jeweils die resultierende Menge als Mengenaufzählung oder als vordefinierte Zahlenmenge an.

a) $\{-1, 3, 10, 100\} \cup \{-1, 3, 4, 5\}$
b) $\{0, 1\} \cup \{-1, 2\}$
c) $\{0.5, 2, 5, 10\} \cap \{\frac{1}{2}, 5, 11, 100\}$
d) $\{1, 3, 5\} \cap \{2, 4\}$
e) $\{1, 2, 3, 5\} \setminus \{2, 5\}$
f) $\{2, 100, 101\} \setminus \{x \in \mathbb{N} : x > 50\}$
g) $\mathbb{Z} \setminus \{x \in \mathbb{Z} : x < 0\}$
h) $\mathbb{N} \cup \{0\}$
i) $\mathbb{R} \cap \{-10.\overline{23}, 0, \pi, \frac{40}{3}\}$
j) $(-10; 10] \setminus (\mathbb{N} \cup \{x \in \mathbb{R} : x \geq -2\})$
k) $(-\infty; \infty)$

3.6. Geben Sie die Mächtigkeit folgender Mengen an.

a) $M_1 = \{x \in \mathbb{N}_0 : 0 \leq x \leq 10\}$
b) $M_2 = \{x \in [1; 10] : x \text{ ist gerade}\}$
c) $M_3 = \{x \in [1; 10) : x \text{ ist gerade}\}$
d) $M_4 = \{x \in \mathbb{N} : x < 10\}$

Lernvideos

Videos zu Mengen:

- Was ist eine Menge? von SimpleClub. (Formale Definitionen und Schreibweisen nicht relevant. Unterschied echte Teilmenge und Teilmenge nicht relevant.)

- Rechnen mit Mengen von Mathe by Daniel Jung. (Komplement hier nicht besprochen, aber trotzdem hilfreich zu verstehen.)
- Lustiges Mengenlehren Video von Mathe by Daniel Jung. (**Nicht relevant**, nur amüsant :).)

Videos zu Zahlenmengen:

- Zahlenarten erklärt von SimpleClub. (Keine Komplexen Zahlen.)
- Zahlenmengen von MathemaTrick.
- Zahlenmengen Playlist von MathePeter.

Videos zu Intervalle:

- Intervalle von Mathe by Daniel Jung.
- Intervalle von MathemaTrick. (Symbole für und/oder nicht relevant.)

KAPITEL 4

Variablen

4.1 Definitionsmenge

4.2 Lösungsmenge

Übungsaufgaben

Lernvideos

KAPITEL 5

Gleichungen und Ungleichungen

5.1 Terme

5.2 Gleichungen

5.3 Ungleichungen

5.4 Äquivalenzumformungen

KAPITEL 6

Brüche

6.1 Addieren

6.2 Multiplizieren

KAPITEL 7

Rechenoperationen und Rechengesetze

7.1 Reihenfolge der Operationen

7.2 Kehrbruch

7.3 Ausklammern

7.4 Ausmultiplizieren

7.5 Potenzgesetze

7.6 Logarithmengesetze

KAPITEL 8

Gleichungen lösen

8.1 Wichtige Konzepte

8.1.1 Satz vom Nullprodukt

8.1.2 Mitternachtsformel

8.1.3 Substitution

8.2 Allgemeines Vorgehen

8.3 Quadratische Gleichungen

8.4 Biquadratische Gleichungen

8.5 Wurzelgleichungen

8.6 Exponentialgleichungen

8.7 Bruchgleichungen

Teil II

Elementare Analysis